На правах рукописи

НОРКИН Михаил Викторович

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ УДАРА ТВЕРДЫХ ТЕЛ, ПЛАВАЮЩИХ НА ПОВЕРХНОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

01.02.05 — механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Казань
2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и математической физики Южного федерального университета

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, профессор Жуков Михаил Юрьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Маклаков Дмитрий Владимирович
	доктор физико-математических наук, профессор Житников Владимир Павлович
	доктор физико-математических наук, профессор Наседкин Андрей Викторович
Ведущая организация:	Институт механики МГУ

Защита состоится «27» мая 2010 г. в 14 часов 30 минут в аудитории мех. 2 на заседании диссертационного совета Д 212.081.11 при Казанском государственном университете по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке им. Н. И. Лобачевского Казанского государственного университета.

Автореферат разослан «_____» апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
кандидат физ.-мат. наук, доцент А. А. Саченков

Общая характеристика работы

Актуальность темы диссертации. Исследования по классическим смешанным задачам гидродинамического удара методами математического моделирования берут свое начало от работ Н. Е. Жуковского, Л. И. Седова, М. В. Келдыша, М. А. Лаврентьева и других авторов. Одна из привлекательных сторон этой области науки состоит в том, что теоретические результаты очень хорошо согласуются с данными эксперимента. Особенно это относится к присоединенным массам и моментам инерции, которые, наряду с задачами удара, находят себе применение при исследовании вибрации твердых тел в жидкости. Среди практических задач, стимулирующих развитие теории гидродинамического удара, упомянем посадку гидросамолетов на воду, вообще проблемы, связанные с падением на воду твердых или упругих тел, а также с внезапным возникновением движений тел, плавающих или погруженных в жидкость.

Вопросы взаимодействия твердого тела с жидкостью при ударе имеют не только практическое значение, но представляют большой теоретический интерес для математической физики. В последнее время большое внимание исследователей привлекают смешанные задачи гидромеханики и теории упругости с неизвестными заранее областями контакта и, в частности, задача о гидродинамическом ударе с отрывом. Особенностью этой задачи является то, что область контакта тела с жидкостью, равно как и зона отрыва, заранее не известна и подлежит определению вместе с течением жидкости после удара. Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Большой интерес представляют задачи об ударе с отрывом, приводящие к образованию многосвязной, в частности, двухсвязной зоны отрыва частиц жидкости. Ярким примером здесь может служить плоская задача об отрывном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Отметим, что основными неизвестными в этой задаче являются точки отрыва, отделяющие на поверхности цилиндра области безотрывного удара от зон отрыва. В трехмерном случае, даже для нецентрального удара по лежащей на свободной поверхности круглой пластинке, неизвестной оказывается кривая. Задача сразу превращается из скалярной в бесконечномерную. Подчеркнем, что проблема отрыва относится к числу малоизученных и труднорешаемых задач.

При исследовании задач удара с учетом влияния дна и стенок представляется весьма актуальным развитие асимптотических и численно-аналитических методов решения смешанных краевых задач. В частности, большой интерес представляют асимптотики, основанные на предположении о малости или, напротив, о большой величине глубины или расстояния от тела до стенки.

К актуальным вопросам гидродинамики относятся также задачи удара неодносвязных тел (тор, кольцо). В теоретическом плане здесь интересны нерегулярные асимптотики тонких тел, позволяющие представить основные характеристики удара в простой аналитической форме, удобной для проведения численных расчетов.

Цель работы. Целью диссертации является разработка и развитие эффективных аналитических и численных методов исследования линейных, а также и нелинейных смешанных задач гидродинамического удара в областях сложной геометрической конфигурации.

Методы исследования. Главное внимание при исследовании линейных задачах гидродинамического удара в ограниченных областях уделяется развитию эффективного асимптотического метода, основанного на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния. Такой подход позволяет свести решение исходной задачи для области сложной геометрической конфигурации к последовательному решению задач в областях, имеющих более простые формы границ. Это дает хорошую возможность использовать для решения поставленных задач методы разделения переменных в специальных ортогональных криволинейных координатах (тороидальных, биполярных, вырожденных биполярных и др.), а также технику парных интегральных уравнений, связанных со специальными функциями (Бесселя, Лежандра). Для решения смешанных задач гидродинамического удара широко применяются методы граничных интегральных уравнений. В некоторых случаях, на их основе, разработаны специальные асимптотические методы, позволяющие представить основные характеристики удара в простой аналитической форме, удобной для проведения инженерных расчетов.

Большое внимание в диссертации уделено развитию аналитических и численных методов решения задач об ударе с отрывом. Одним из наиболее эффективных и, в тоже время, перспективных методов их решения является метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна. Такой подход позволяет одновременно определить неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости и течение жидкости после удара. Также применяются аналитические методы, основанные на использовании техники конформных отображений в сочетании с математическим аппаратом парных интегральных уравнений. Для определения неизвестной заранее области отрыва частиц жидкости, наряду с традиционными подходами, применяется вариационный принцип Огазо. Кроме этого используются специальные асимптотические методы.

Научная новизна положений, выносимых на защиту. Данная диссертационная работа вносит существенный вклад в исследование линейных, а также и нелинейных смешанных задач гидродинамического удара в областях сложной геометрической конфигурации.

В диссертационной работе получены следующие **новые результаты**:

1. Разработан специальный асимптотический метод, направленный на решение пространственных задач гидродинамического удара в областях сложной геометрической конфигурации.

2. Решен ряд конкретных смешанных задач в областях сложной формы.

3. Построены логарифмически — степенные асимптотики основных характеристик удара для случая тонкого тора эллиптического поперечного сечения, плавающего на поверхности неограниченной жидкости.

4. Разработаны эффективные аналитические методы решения нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях (задач об ударе с отрывом).

5. При помощи метода нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна проведено исследование плоской задачи об отрывном ударе эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины.

6. Дано обобщение задачи об отрывном ударе эллиптического цилиндра на случай неоднородной несжимаемой жидкости.

7. Исследована существенно пространственная смешанная задача об отрывном ударе круглого диска, плавающего на поверхности идеальной, несжимаемой и неограниченной жидкости.

Достоверность полученных выводов обусловлена последовательным применением математически обоснованных методов, строгими доказательствами, решением задач разными методами и сравнением, где это возможно, с результатами других авторов.

Практическая значимость. Полученные в диссертации результаты имеют широкую область применения при исследовании посадки гидросамолетов на воду, падении на воду твердых и упругих тел, а также внезапном возникновении движений тел плавающих или погруженных в жидкость. Разработанные методы исследования смешанных задач гидродинамического удара позволяют получить большой объем информации, необходимый для понимания явлений, возникающих в результате удара, в частности, для понимания явления отрыва жидкости от поверхности плавающего тела. Развитые подходы к решению конкретных задач, в частности, асимптотические методы, могут использоваться в близких задачах механики сплошной среды, например, в задачах проникания твердого тела в жидкость, в контактных задачах теории упругости и т. п.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались на международных конференциях «Современные проблемы механики сплошной среды» (Ростов-на-Дону, 1995, 1997–2001, 2006–2009); «Нелинейные задачи теории гидродинамической устойчивости и турбулентность» (Москва, 2008); на семинаре «Неустойчивость и турбулентность» (Москва, Институт механики МГУ, 2009); на совместном заседании отделения механики НИИММ им. Н. Г. Чеботарева КГУ и кафедры аэрогидромеханики КГУ (Казань, 2009); на семинаре кафедры математического моделирования ЮФУ (Ростов-на-Дону, 2009), неоднократно на семинаре «Математические вопросы гидродинамики» (кафедра вычислительной математики и математической физики ЮФУ, Ростов-на-Дону, 1993–2009); на заседании Ростовского математического общества (2008).

Результаты диссертации также докладывались на двух зарубежных научных семинарах: School of Mathematics, University of East Anglia, Norwich, UK (2009); Faculty of Mathematics, Physics and Computer Science. Brandenburg University of Technology, Cottbus (BTU), Germany (2009).

В диссертацию вошли результаты, полученные автором как руководителем проекта РФФИ «Взаимодействие твердых и упругих тел с жидкостью» (01-01-00105, 2001–2003) и как исполнителем проектов: РФФИ (00-15–96188), Президентской программы поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (НШ.1768.2003.1, НШ.5747.2006.1), аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (2.1.1/554; 2.1.1/6095). Исследования по удару с отрывом были также поддержаны грантом The Royal Society grant, UK (Project JP080479) «Free-surface separation from a body which starts to move suddenly».

Публикации. По результатам диссертации автором опубликовано 13 работ в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, входящих в перечень ВАК и одна научная монография, которые приводятся в конце автореферата.

Структура и обьем диссертации. Диссертация состоит из введения, семи глав, приложения и списка литературы. Полный объем диссертации составляет 288 страниц. Список литературы содержит 338 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение

Во введении обоснована актуальность тематики, сделан обзор литературы по данной теме, описана структура работы, сформулированы цели диссертации, приведены сведения об апробации работы.

Глава I

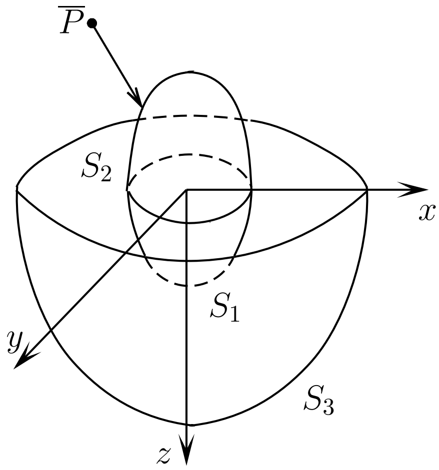
В этой главе дается постановка задачи о безотрывном, вертикальном ударе плавающего тела и излагается эффективный асимптотический метод, направленный на решение пространственных задач гидродинамического удара в областях сложной геометрической конфигурации. В качестве примера рассматривается задача о вертикальном ударе круглого абсолютно твердого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной произвольной поверхностью вращения. Также приводятся некоторые другие результаты, имеющие общий характер.

В п. 1.1 этой главы, в классической постановке (Л. И. Седов, 1934 г.), рассматривается задача об ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Удар предполагается таким, что в результате него не происходит отрыва частиц жидкости от смоченной поверхности тела (безотрывный удар). Отметим, что определение для данного тела системы импульсивных сил и соответствующих им точек приложения, при которых возможен безотрывный удар (определение условий безотрывности удара), является одним из наиболее сложных вопросов теории гидродинамического удара.

В дальнейшем будет рассматриваться вертикальный удар, в результате которого тело начинает двигаться в вертикальном направлении (вдоль вектора силы тяжести) и, в общем случае, вращаться вокруг горизонтальной оси. В частности, если вращение отсутствует, удар называется центральным. Предположим также, что в каждой точке смоченной поверхности тела, проекция вектора внешней нормали на направление вектора силы тяжести неотрицательна. В этом случае (по крайней мере для гладкой границы) центральный удар плавающего тела будет безотрывным. Как показывают примеры, вертикальный удар плавающего тела при малых угловых скоростях также не будет приводить к отрыву. Таким образом, выделен класс задач, к которому применима линейная теория удара.

Пусть до удара плавающее тело и жидкость покоились. Тогда движение жидкости после удара будет потенциальным, причем потенциал скоростей

Φ, приобретенных частицами жидкости в момент, непосредственно следующий после удара, определяется решением следующей смешанной краевой задачи теории потенциала:



Фиг. 1.1

$$\Delta\Phi = 0, \quad r \in D, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \overline{V}_n, \quad r \in S_1, \tag{1.2}$$

$$\Phi = 0, \qquad r \in S_2, \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \tag{1.4}$$

$$\Phi\Big|_{\infty} = 0, \tag{1.5}$$

$$p_t = -\rho\Phi \geqslant 0, \tag{1.6}$$

$$\overline{V}_n = \big(\overline{V_0} + \overline{\Omega} \wedge \overline{R}, \overline{n}\big) = v_0 n_z + \omega_x(y n_z - z n_y) + \omega_y(z n_x - x n_z). \tag{1.7}$$

Здесь D — область, занятая жидкостью (граница области D предполагается кусочно-гладкой); S_1, S_2 и S_3 — соответственно смоченная поверхность твердого тела, свободная поверхность жидкости и неподвижная твердая граница бассейна; $\overline{V}_n$ — нормальная компонента скоростей точек границы тела; $\overline{V_0} = (0, 0, v_0)$ и $\overline{\Omega} = (\omega_x, \omega_y, 0)$ — векторы поступательной и угловой скорости, приобретенные телом в результате удара; $\overline{R} = (x, y, z)$ — радиус-вектор точек границы; $\overline{n} = (n_x, n_y, n_z)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела; p_t — импульсивное давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости. Условие (1.5) добавляется только в случае неограниченной жидкости.

Кроме условий (1.1)–(1.7) нужно еще поставить условие регулярности вблизи линий раздела свободной границы с твердыми поверхностями, где граница области D теряет гладкость. Если особые линии и точки (ребра и конические точки) имеются на границах S_1 и S_3, то в них также ставится условие регулярности. Достаточным условием является требование конечности кинетической энергии:

$$\int\limits_D (\nabla\Phi)^2 \, dD < \infty. \tag{1.8}$$

Отметим, что ограничение (1.8), являясь естественным с физической точки зрения, вполне замыкает математическую постановку задачи.

Для полной постановки задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса плавающего тела при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и точкой его приложения с одной стороны и векторами поступательной и угловой скорости, приобретенными телом в результате удара, с другой. Приведем эти уравнения в векторной форме:

$$\overline{G} = \rho \iint\limits_{S_1} \Phi \overline{n}\, ds + \overline{P}, \qquad \overline{M} = \rho \iint\limits_{S_1} \Phi \overline{R} \wedge \overline{n}\, ds + \overline{R_0} \wedge \overline{P}. \tag{1.9}$$

Здесь $\overline{G}$ и $\overline{M}$ — импульс и момент импульса твердого тела; интегральные слагаемые выражают импульс и момент импульса, подействовавшие со стороны жидкости на плавающее тело в результате удара; $P = (P_x, P_y, P_z)$ — импульс внешней ударной силы, приложенный к твердому телу в точке $R_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

Важно отметить, что решение задачи о безотрывном ударе плавающего тела применимо только в том случае, когда импульсивное давление p_t неотрицательно во всей области, занятой жидкостью (формула (1.6)), что в силу классического принципа максимума и минимума для гармонической функции равносильно неотрицательности функции p_t на смоченной поверхности тела S_1. Проверить выполнение последнего условия до решения поставленной задачи удается только в некоторых исключительных случаях. Поэтому обычно предположение о безотрывности удара делается априори и проверяется только после решения задачи (1.1)–(1.8), то есть только после нахождения потенциала скоростей Φ. Если условие неотрицательности функции p_t (неположительности функции Φ) выполнено на всей смоченной поверхности тела, то данная математическая модель корректна и полностью соответствует задаче о безотрывном ударе плавающего тела. Однако, предположение о безотрывности удара часто приводит к решениям с отрицательными импульсивными давлениями в жидкости, что недопустимо физически. В этом случае математическая модель (1.1)–(1.8) оказывается некорректной и строится другая модель, отвечающая задаче об ударе с отрывом. Таким образом, появление отрицательных импульсивных давлений в жидкости объясняется наличием зон отрыва частиц жидкости от смоченной поверхности плавающего тела.

Дальнейшие рассуждения будем проводить при следующих упрощающих предположениях (смотреть п. 1.2). Считаем, что плавающее тело однородно и имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии xz, yz, xy. В этом случае центр тяжести тела совпадает с началом координат, а его главные оси инерции — с осями координат. Предположим также, что вся область, занятая жидкостью, обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии xz и yz. Покомпонентная запись уравнений (1.9) с учетом сделанных предположений симметрии приводит к следующим соотношениям:

$$(m_T + m)\, v_0 = P_z,\ (I_x + J_x)\, \omega_x = y_0 P_z - z_0 P_y,\ (I_y + J_y)\, \omega_y = z_0 P_x - x_0 P_z,$$

$$P_x = \mu_2 \omega_y, \quad P_y = \mu_1 \omega_x, \quad x_0 P_y = y_0 P_x, \tag{1.10}$$

$$m = -\rho \iint\limits_{S_1} \Phi^1 n_z ds,\ \ \mu_1 = -\rho \iint\limits_{S_1} \Phi^2 n_y ds,\ \ \mu_2 = -\rho \iint\limits_{S_1} \Phi^3 n_x ds, \tag{1.11}$$

$$J_x = -\rho \iint\limits_{S_1} \Phi^2\, (y n_z - z n_y)\, ds, \quad J_y = -\rho \iint\limits_{S_1} \Phi^3\, (z n_x - x n_z)\, ds,$$

где m_T, I_x, I_y — соответственно масса тела и его моменты инерции относительно осей x и y (в дальнейшем считаем их заданными величинами); m, J_x, J_y, μ_1, μ_2 — коэффициенты присоединенных масс; через Φ^1, Φ^2, Φ^3 обозначены единичные потенциалы, соответствующие случаям $v_0 = 1$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 0$, (центральный удар), $v_0 = 0$, $\omega_x = 1$, $\omega_y = 0$ и $v_0 = 0$, $\omega_x = 0$, $\omega_y = 1$.

Таким образом, в линейной постановке, дело сводится к решению смешанной краевой задачи (1.1)–(1.8), проверке условия безотрывности удара ($\Phi \leqslant 0$ на S_1) и определению коэффициентов присоединенных масс по формулам (1.11).

Подчеркнем, что коэффициенты присоединенных масс m, J_x, J_y, μ_1, μ_2 являются главными неизвестными в задаче о безотрывном и вертикальном ударе плавающего тела.

В п. 1.3 излагается специальный асимптотический метод, направленный на решение пространственных задач гидродинамического удара в областях сложной геометрической конфигурации. В его основе лежит предположение о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния. В дальнейшем считаем, что неподвижная твердая граница бассейна S_3 получена в результате гомотетии с центром в начале координат и коэффициентом h некоторой фиксированной поверхности S_3^0: $S_3 = hS_3^0$ ($x = hx^0$, $y = hy^0$, $z = hz^0$). Собственно говоря, речь идет о построении асимптотики решения рассматриваемой смешанной задачи при $h \to \infty$.

Идея этого метода своими корнями уходит к трудам классиков, которые при исследовании задач о движении в жидкости двух подобных тел, например, двух шаров или двух круглых цилиндров применяли метод последовательных приближений Стокса. С другой стороны в вычислительной математике хорошо известен альтернирующий метод Шварца. В обоих случаях решение исходной задачи для области сложной геометрической конфигурации сводится к последовательному решению задач в областях, имеющих более простые формы границ. Таким образом, поочередно рассматриваются две краевые задачи в областях D_∞ и G — случай $h=\infty$ и задача в ограниченном бассейне при отсутствии плавающего тела. При этом каждый раз ликвидируются невязки, возникающие на неподвижной границе S_3 и смоченной поверхности тела S_1. После разложения полученных приближений в ряды по степеням h^{-1} и удержания необходимого количества членов, приходим к асимптотике для больших значений h. Отметим, что такой подход позволяет построить асимптотику потенциала скорости в любой фиксированной (не зависящей от h) окрестности смоченной поверхности тела и на ее основе определить асимптотики основных характеристик удара — коэффициентов присоединенных масс. В частности, асимптотика присоединенной массы плавающего тела, являющаяся основной характеристикой задачи о центральном ударе, имеет вид ($\rho=1$):

$$\begin{aligned} m \;=\; & m_\infty + \frac{\xi_1\,(m_\infty+V)^2}{2\pi}h^{-3} + \frac{(m_\infty+V)(c_2\zeta_1+c_3\zeta_2)}{4\pi}h^{-5} + \\ & + \frac{\xi_1^2(m_\infty+V)^3}{4\pi^2}h^{-6} + O(h^{-7}), \quad h\to\infty. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Здесь m_∞ — присоединенная масса твердого тела, плавающего на поверхности неограниченной жидкости (случай $h=\infty$); V — объем погруженной части тела.

Важно отметить, что постоянные m_∞, c_2, c_3, входящие в асимптотическую формулу (1.12), зависят только от геометрии плавающего тела, а другие коэффициенты ξ_1, ζ_1, ζ_2 — только от формы границы бассейна. Первая группа характерных величин находится на основании решения Φ_1^1 задачи об ударе твердого тела, плавающего на поверхности неограниченной жидкости (случай $h=\infty$, $c_1=m_\infty+V$):

$$c_2 = \iint\limits_{S_1} \left(x^2z-3^{-1}z^3\right) n_z\,ds - \iint\limits_{S_1} \left(2xzn_x+x^2n_z-z^2n_z\right)\Phi_1^1\,ds,$$

$$c_3 = \iint\limits_{S_1} \left(y^2z-3^{-1}z^3\right) n_z\,ds - \iint\limits_{S_1} \left(2yzn_y+y^2n_z-z^2n_z\right)\Phi_1^1\,ds.$$

Для определения второй группы характерных постоянных требуется решить краевые задачи в ограниченном бассейне при отсутствии плавающего тела:

$$\Delta f_k = 0, \quad r \in G^0, \qquad f_k\Big|_{z=0} = 0, \qquad \frac{\partial f_k}{\partial n}\Big|_{S_3^0} = Q_k, \quad k = 1, \ldots, 3, \quad (1.13)$$

$$Q_1 = \frac{\partial}{\partial n}\frac{z}{R^3}, \quad Q_2 = \frac{\partial}{\partial n}\frac{z(4x^2 - y^2 - z^2)}{R^7}, \quad Q_3 = \frac{\partial}{\partial n}\frac{z(4y^2 - x^2 - z^2)}{R^7},$$

где G^0 — фиксированная область, ограниченная поверхностью S_3^0 и плоскостью $z = 0$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. После решения краевых задач (1.13) постоянные ξ_1, ζ_1, ζ_2 находятся по формулам:

$$\zeta_1 = 3\xi_5 + \xi_2, \quad \zeta_2 = 3\xi_6 + \xi_3,$$

$$\xi_1 = -\frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \xi_2 = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial x^2 \partial z}, \quad \xi_3 = -\frac{\partial^3 f_1}{\partial y^2 \partial z}, \quad \xi_5 = -\frac{\partial f_2}{\partial z}, \quad \xi_6 = -\frac{\partial f_3}{\partial z},$$

где частные производные вычисляются в точке $M_0(0, 0, 0)$.

Такое разделение дает хорошую возможность использовать для решения названных задач многие известные методы. В частности, отметим методы разделения переменных для уравнений Лапласа и функции тока в специальных ортогональных криволинейных координатах (тороидальных, биполярных, вырожденных биполярных и др.) и связанные с ними методы парных интегральных уравнений; методы граничных интегральных уравнений (методы ГИУ); вариационные методы.

Аналогичные асимптотики получены для коэффициентов J_1, J_2, μ_1, μ_2.

В п. 1.4 основное внимание уделяется определению условия безотрывности удара круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной произвольной поверхностью вращения. В данном случае дело сводится к нахождению круга, расположенного в плоскости свободной поверхности жидкости с центром в центре диска, причем такого, что если точка приложения внешнего ударного импульса лежит в этом круге, то вертикальный удар по диску к отрыву жидкости от его поверхности не приводит; в противном случае возникает отрыв.

Впервые условие безотрывности удара круглого диска, плавающего на поверхности слоя жидкости конечной или бесконечной глубины, было найдено в статье И. И. Воровича и В. И. Юдовича (ПММ, 1957 г.). Для жидкости малой глубины этот вопрос подробно изучен в статьях М. И. Чебакова (ПММ, 1974 г.) и Д. Б. Рохлина (Журнал ВМ и МФ, 1998 г.). В настоящем параграфе дается обобщение результатов статьи И. И. Воровича и В. И. Юдовича на случай произвольной осесимметричной области.

Для присоединенной массы и присоединенного момента инерции диска, а также радиуса круга, ограничивающего область безотрывного вертикального удара, получены явные асимптотические формулы. Сделан качественный вывод о том, что стенки бассейна различной формы оказывают неоднозначное влияние на условие безотрывности удара круглого диска. Для одних границ круг, ограничивающий область безотрывного удара, увеличивается, а для других, наоборот, уменьшается по сравнению со случаем неограниченной жидкости.

В п. 1.5 получены достаточные признаки начала отрыва жидкости от смоченной поверхности плавающего тела вращения, отмечены их геометрические следствия. Найдены условия безотрывности удара для ряда конкретных тел (поверхности вращения веретенообразной формы, эллипсоид вращения, круглый диск, кольцо, тор и шар, частично погруженный в жидкость). Показано, что отрыв жидкости может происходить с разных сторон смоченной границы тела, в зависимости от его формы.

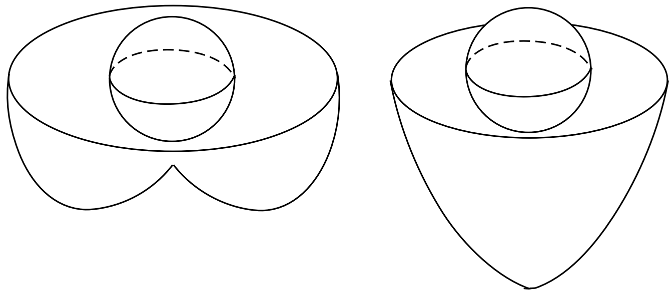
Глава II

В этой главе рассмотрены конкретные примеры решения смешанных задач в областях сложной формы. Применение прямого асимптотического метода, изложенного в первой главе, позволяет свести их решение к последовательному решению задач в областях, имеющих более простые формы границ. Это дает хорошую возможность использовать для решения поставленных задач методы разделения переменных в специальных ортогональных криволинейных координатах (тороидальных, биполярных, вырожденных биполярных и др.), а также технику парных интегральных уравнений, связанных со специальными функциями (Бесселя и Лежандра).

В п. 2.1, в качестве первых примеров применения полученных в предыдущей главе формул, рассмотрены задачи удара в областях со сферическими границами. Изучены случаи, когда тело плавает на поверхности жидкости, наполняющей полушар и шар, полупогружен в жидкость, наполняющую ограниченный бассейн. Отмечено, что области, имеющие сферические границы, выделяются среди других областей, представляя собой некоторый вырожденный случай по отношению к величине погрешности остаточного члена. Именно для этих границ асимптотические формулы принимают наиболее простой вид.

В п. 2.2 рассмотрены смешанные задачи для слоя и полубесконечного цилиндра. Подробно изучена задача, о центральном ударе твердого тела, плавающего на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Для присоединенной массы плавающего тела найдена явная асимптотическая формула. Важной отличительной особенностью полученной формулы является то, что коэффициенты при ее старших членах явно выражаются через основные характеристики удара твердого тела, плавающего на поверхности жидкого полупространства и, следовательно, для их определения не требуется решения новых краевых задач.

В п. 2.3, в качестве нетривиального примера, рассмотрена задача об ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной веретенообразной поверхностью вращения. Данная поверхность получается вращением дуги окружности вокруг прямой, проходящей через ее крайние точки (фиг. 2.1). Использование прямого асимптотического метода, изложенного в первой главе, позволяет свести эту проблему к решению двух более простых задач, а именно, отдельно рассмотреть задачу для случая, когда тело плавает на поверхности неограниченной жидкости (форма тела пока произвольная) и задачу для области, ограниченной веретенообразной поверхностью вращения при отсутствии плавающего тела. Для решения последней задачи используются методы разделения переменных для уравнений Лапласа и функции тока в биполярных координатах. В результате определяются характерные величины, зависящие только от формы границы бассейна. Подчеркнем, что для нахождения второй группы характерных величин, зависящих только от геометрии плавающего тела, необходимо конкретизировать форму тела.



Фиг. 2.1. Твердое тело, плавающее на поверхности жидкости, наполняющей бассейн, ограниченный веретенообразной поверхностью вращения

В п. 2.4 исследуется задача о центральном ударе вырожденного тора — твердого тела, полученного вращением окружности вокруг своей касательной, и наполовину погруженного в идеальную несжимаемую жидкость бесконечной глубины. Для ее решения применяются методы разделения переменных для уравнений Лапласа и функции тока в вырожденных биполярных координатах. Для основных характеристик удара — потенциала скоростей на смоченной поверхности вырожденного тора и присоединенной массы, получены явные выражения.

В п. 2.5 изучена задача о вертикальном ударе кольца, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, занимающей все нижнее полупространство. С помощью тороидальных координат данная задача сводится к решению парных интегральных уравнений, связанных с функциями Лежандра, а затем к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с гладкими ядрами. Найдены численные значения относительных коэффициентов присоединенных масс, выведено условие безотрывности удара. Отдельно рассмотрены логарифмически-степенные асимптотики тонкого кольца и степенные асимптотики кольца с малым центральным отверстием. В осесимметричном случае асимптотики присоединенной массы кольца перекрываются во внутреннем диапазоне и дают исчерпывающее решение задачи с погрешностью менее, чем 0,5%.

В п. 2.6 приводятся конкретные расчетные формулы коэффициентов присоединенных масс в задачах об ударе вырожденного тора, шара и кольца, плавающих на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, ограниченной веретенообразной поверхностью вращения.

Глава III

В этой главе рассмотрена задача о вертикальном ударе твердого тора эллиптического поперечного сечения, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой и неограниченной жидкости. Для решения данной задачи применяется метод граничных интегральных уравнений (метод ГИУ). Строятся логарифмически-степенные асимптотики решений интегральных уравнений, соответствующие случаю тонкого тора. На их основе определяются асимптотики коэффициентов присоединенных масс.

В п 3.1 дается постановка задачи и кратко излагается метод граничных интегральных уравнений. Данная задача имеет два существенных параметра: $\varepsilon = a/b$, $\delta = c/a$, где a и c — соответственно горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса поперечного сечения тора, b — расстояние от оси вращения z до центра этого эллипса, $0 < \varepsilon < 1$, $0 < \delta < \infty$.

В п. 3.2 для решения задачи о вертикальном ударе твердого тора кругового поперечного сечения применяется метод граничных интегральных уравнений. С помощью параметризации поверхности тора в тороидальных координатах данная задача сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода на конечном промежутке. Причем ядра полученных интегральных уравнений выражаются через полные эллиптические интегралы I и II рода и имеют логарифмические особенности на диагонали. В случае тонкого тора построены и строго обоснованы логарифмически-степенные асимптотики решений интегральных уравнений. На их основе определены асимптотики коэффициентов присоединенных масс ($\varepsilon \to 0$). В частности, асимптотика присоединенной массы тора имеет вид:

$$m = \rho a^3 \pi^2 \left[\varepsilon^{-1} + \frac{1}{4}\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} + \left(\frac{3\ln 2}{4} - \frac{7}{16} \right) \varepsilon + \frac{1}{32}\varepsilon^3 \left(\ln \varepsilon^{-1} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{3\ln 2}{16} - \frac{43}{256} \right) \varepsilon^3 \ln \varepsilon^{-1} - \left(\frac{21\ln 2}{64} - \frac{9(\ln 2)^2}{32} - \frac{25}{512} \right) \varepsilon^3 + o(\varepsilon^3) \right]. \quad (3.1)$$

Важно отметить, что асимптотика присоединенной массы тора позволяет проводить численные расчеты во всем диапазоне изменения характерного параметра задачи (то есть для любых торов, $0 < \varepsilon < 1$) с погрешностью менее одного процента. Такой вывод был сделан на основе сравнения асимптотической формулы (3.1) с численными результатами, приведенными в статье T. Miloh, G. Waisman, D. Weils (J. Eng. Math. 1978), а также с присоединенной массой вырожденного тора.

В п. 3.3 асимптотики тонкого тора обобщены на случай тора эллиптического поперечного сечения. Для основных характеристик удара найдены и строго обоснованы явные асимптотические формулы ($\varepsilon \to 0$):

$$m = \rho a^3 \pi^2 \left[\varepsilon^{-1} + \frac{(1+\delta)^2}{16}\varepsilon \ln \varepsilon^{-1} + \frac{(1+\delta)^2}{16} \left(\ln 16 - \ln(1+\delta) - \frac{7}{4} \right) \varepsilon + \right.$$

$$\left. + O\left(\varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1} \right) \right],$$

$$J = \rho a^5 \frac{\pi^2}{2} \varepsilon^{-3} \left(1 - \frac{3(1+\delta)^2}{16} \varepsilon^2 \ln \varepsilon^{-1} + O(\varepsilon^2) \right),$$

$$\mu_2 = \rho a^4 \pi \varepsilon^{-1} \left(\frac{(2\delta^2 + \delta - 5)\delta}{6} + O(\varepsilon) \right).$$

В предельном случае, когда $\delta \to 0$, приходим к асимптотикам присоединенной массы и присоединенного момента инерции тонкого кольца, плавающего на поверхности неограниченной жидкости.

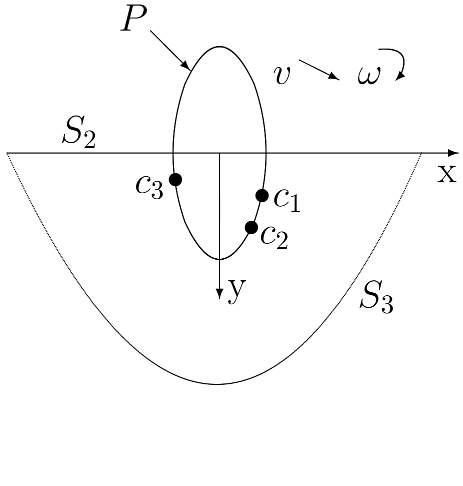
В п. 3.4 рассматривается тор произвольного поперечного сечения.

Глава IV

В этой главе дается постановка задачи об ударе с отрывом твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Особенность данной задачи заключается в том, что область контакта тела с жидкостью (равно как и зона отрыва) заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости после удара. Вследствие этого поставленная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Разработаны специальные аналитические методы решения нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях. Дано решение ряда плоских смешанных задач об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной и несжимаемой жидкости. Рассмотрены случаи, когда область, занятая жидкостью, представляет собой полуплоскость, полосу (отрывной удар пластины, плавающей на поверхности жидкости конечной глубины), усеченную круговую луночку и произвольную ограниченную область.

В п. 4.1 настоящей главы, в классической постановке (Л. И. Седов и другие), рассматривается плоская задача об ударе твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Предполагается, что в результате удара происходит отрыв частиц жидкости от поверхности тела (удар с отрывом). Вследствие этого на смоченной поверхности плавающего тела образуется зона отрыва, которая в общем случае представляет собой многосвязное множество. Важно отметить, что зона отрыва (равно как и область контакта тела с жидкостью) заранее неизвестна и подлежит определению вместе с течением жидкости после удара, то есть вместе с потенциалом скоростей Φ. На основании этого поставленная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Подчеркнем, что «свободные границы» не означают, что область в которой ищется решение, не известна. Она известна, но разбиение ее границы на области контакта и области отрыва следует определить вместе с течением жидкости после удара.

Пусть до удара тело и жидкость покоились. Тогда движение жидкости после удара будет потенциальным, причем потенциал скоростей Φ, приобретенных частицами жидкости в результате удара, определяется решением смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестными априори областями контакта (Л. И. Седов, 1965 г.; В. И. Юдович, 2005 г.):



$$\Delta\Phi = 0 \qquad r \in D, \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n, \quad \Phi \leqslant 0 \qquad r \in S_{11}, \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} \geqslant V_n, \quad \Phi = 0 \qquad r \in S_{12}, \tag{4.3}$$

$$\Phi = 0 \quad r \in S_2, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad r \in S_3, \tag{4.5}$$

$$\Phi \to 0 \quad r \to \infty, \tag{4.6}$$

$$V_n = v_x n_x + v_y n_y + \omega(y n_x - x n_y). \tag{4.7}$$

Здесь D — область, занятая жидкостью (граница области D предполагается кусочно-гладкой); $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$ — смоченная поверхность тела, причем S_{11} — часть границы на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а S_{12} — зона отрыва; S_2 — свободная поверхность жидкости; S_3 — неподвижная твердая граница бассейна; $n = (n_x, n_y)$ — вектор нормали к поверхности S_1, направленный внутрь области D; V_n — проекция на эту нормаль скоростей точек границы тела; v_x, v_y, ω — поступательные вдоль осей x и y и угловая скорости, приобретенные телом в результате удара; $r = (x, y)$. Декартовы координаты x, y введены таким образом, что ось x расположена вдоль линии свободной поверхности жидкости, ось y направлена вертикально вниз вглубь жидкости, начало координат совпадает с некоторой точкой тела. В рассматриваемых далее частных случаях пластинки и эллипса начало координат выбирается в центре этих тел. Граничное условие (4.6) добавляется только в случае неограниченной жидкости. Импульсивное давление p_t связано с потенциалом скоростей Φ соотношением $p_t = -\rho\Phi$, где ρ — плотность жидкости. После решения задачи (4.1)–(4.6) скорости жидких частиц сразу после удара находятся по формуле $\overline{V} = \operatorname{grad} \Phi$.

Объясним физический смысл неравенств в (4.2), (4.3). Первое условие означает, что импульсивное давление p_t должно быть направлено в сторону жидкости, должно сжимать, но не растягивать жидкость. Второе неравенство требует, чтобы в каждой точке смоченной границы твердого тела жидкая частица не входила внутрь твердого тела, хотя ей разрешается отрываться от этой границы. В тех точках границы S_1, в которых $\Phi < 0$, выполняется равенство $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n$, а в тех точках, где $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} > V_n$, справедливо равенство $\Phi = 0$. Вместе с тем, в некоторых точках границы S_1 могут одновременно выполняться равенства $\Phi = 0$ и $\dfrac{\partial \Phi}{\partial n} = V_n$. Это, например, происходит в точках раздела зоны отрыва S_{12} и зоны безотрывного удара S_{11}.

В статье В. И. Юдовича (Владик. матем. журнал, 2005 г.) доказано, что поставленная задача с односторонними неравенствами на границе имеет единственное решение при дополнительном условии конечности кинетической энергии течения жидкости после удара.

Для полной постановки задачи необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса плавающего тела при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и иточкой его приложения, с одной стороны, и поступательной и угловой скоростями, приобретенными телом в результате удара, с другой.

В п. 4.2 при помощи метода парных интегральных уравнений, связанных с тригонометрическими функциями, строится точное решение задачи об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой и неограниченной жидкости. Для точки отрыва пластины найдено явное выражение ($2a$ — ширина пластины; $v_y = v_0$, $v_x = 0$):

$$c_\infty = \frac{4v_0}{3\omega} + \frac{a}{3}.$$

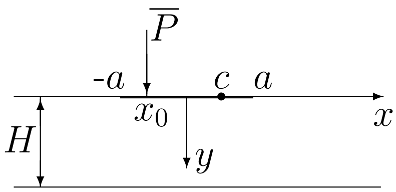
Установлена связь между точкой приложения внешнего ударного импульса x_0 и точкой отрыва пластины c_∞ (массой и моментом инерции пластины пренебрегаем). Получены явные формулы для определения полного ударного импульса и его момента относительно начала координат, подействовавшие на пластину со стороны жидкости во время удара.

В п. 4.3 рассматриваются различные способы определения точки отрыва c. Приводится формулировка вариационного принципа Огазо (см., например, Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными, 1972 г.) и дается его применение к решению задачи о вертикальном ударе пластины. Суть данного вариационного принципа заключается в том, чтобы вначале построить решение $\Phi_{\sigma_2}(x, y)$ соответствующей линейной смешанной краевой задачи в области D с фиксированным разбиением границы S_1 на области задания краевых условий типа Дирихле–Неймана (σ_2 и σ_1 — предполагаемые зоны отрыва и контакта, $S_1 = \sigma_1 \cup \sigma_2$). После этого, для определения функции $\Phi(x, y)$ в произвольной точке области D, необходимо взять точную нижнюю грань функции $\Phi_{\sigma_2}(x, y)$ по всем таким разбиениям:

$$\Phi(x, y) = \inf_{\sigma_2} \Phi_{\sigma_2}(x, y) \quad \text{для всех} \quad (x, y) \in D.$$

В п. 4.4 определяется точное решение задачи о вертикальном ударе эллиптического цилиндра, полупогруженного в жидкость бесконечной глубины. При помощи конформного отображения области течения (верхней полуплоскости с выброшенным полуэллипсом) на верхнюю полуплоскость данная задача сводится к задаче об отрывном ударе пластины.

В п. 4.5 исследуется плоская задача об отрывном ударе пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины.



Решение данной задачи состоит из двух основных этапов. Вначале, при помощи метода парных интегральных уравнений, связанных с тригонометрическими функциями, строится точное решение линейной смешанной краевой задачи в полосе, когда на одной из ее границ имеется отрезок, разделяющий краевые условия первого и второго рода. После этого точка отрыва пластины находится с помощью вариационного принципа Огазо, из которого автоматически следует выполнение граничных условий в виде неравенств. Отметим, что решение соответствующей линейной задачи о центральном ударе пластинки в случае жидкости конечной глубины, впервые, было получено М. В. Келдышем, 1935 г.

В результате для определения точки отрыва пластины выведено трансцендентное уравнение:

$$\frac{v_0}{\omega} + \frac{a-c}{2} - \frac{H}{2\pi} f'(b) = 0, \tag{4.8}$$

$$f(b) = \frac{\operatorname{ch} b/2}{K(\operatorname{th} b/2)} \int\limits_0^b \frac{t^2\, dt}{\sqrt{2\operatorname{ch} b - 2\operatorname{ch} t}}, \quad b = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{\pi}{H},$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода; H — глубина жидкости; $2a$ — ширина пластины; v_0 и ω — поступательная и угловая скорости, приобретенные пластиной в результате удара; c — точка отрыва пластины.

Уравнение (4.8) может быть эффективно решено асимптотически при больших значениях H. Для этого необходимо разложить функцию $f'(b)$ в ряд по степеням H^{-1} и искать решение уравнения (4.8) в виде ряда по таким же степеням. После применения метода неопределенных коэффициентов, получим для точки отрыва c асимптотическую формулу:

$$c = c_\infty + \frac{\pi^2}{576}(a+c_\infty)^3 H^{-2} - \frac{\pi^4}{34560}(a+c_\infty)^5 H^{-4} + O(H^{-6}), \quad H \to \infty, \tag{4.9}$$

где c_∞ — точка отрыва в случае неограниченной жидкости.

Для более полного исследования задачи также был найден главный член асимптотики точки отрыва пластины в случае жидкости малой глубины ($H \to 0$):

$$c = \frac{3v_0}{2\omega} + \frac{a}{2}. \tag{4.10}$$

Подчеркнем, что трансцендентное уравнение (4.8) вместе с асимптотиками для больших и малых H позволяет провести исчерпывающий качественный и количественный анализ задачи об отрывном ударе пластины в случае жидкости конечной глубины. Отметим также, что данное уравнение может быть достаточно эффективно решено методом секущих.

Наконец заметим, что наряду с уравнением (4.8) было выведено другое трансцендентное уравнение, позволяющее непосредственно определить точку отрыва пластины по заданной точке приложения внешнего ударного импульса (массой и моментом инерции пластины пренебрегаем).

В п. 4.6 рассматривается обобщение полученных в предыдущем параграфе результатов на случай произвольной ограниченной (односвязной) области. Решение данной задачи строится при помощи конформного отображения односвязной цилиндрической области на полосу, с последующим применением техники парных интегральных уравнений, связанных с тригонометрическими функциями. Такой подход позволяет получить для определения точки отрыва пластины трансцендентное уравнение, которое в частном случае жидкости конечной глубины совпадает с уравнением (4.8). В качестве конкретного примера рассмотрен случай, когда область, занятая жидкостью представляет собой усеченную круговую луночку.

В п. 4.7 дается обобщение специального асимптотического метода, хорошо зарекомендовавшего себя при решении линейных задач на нелинейную задачу об отрывном ударе пластины. Данный метод основывается на предположении о том, что стенки бассейна удалены от плавающего тела на большие расстояния. При самых общих предположениях относительно геометрии области построены асимптотики основных характеристик удара. В частности, найдена асимптотика точки отрыва пластины:

$$c = c_\infty + \frac{1}{3}\left(\frac{a + c_\infty}{2}\right)^3 [\xi_1 h^{-2} - ph^{-3} + qh^{-4}] + O(h^{-5}), \quad h \to \infty,$$

где h — безразмерный параметр, характеризующий удаление стенок бассейна произвольной формы от плавающей пластины (коэффициент гомотетии некоторой фиксированной кривой S_3^0 на кривую S_3); c_∞ — точка отрыва пластины в случае неограниченной жидкости; коэффициенты ξ, p, q зависят исключительно от формы границы бассейна.

В п. 4.8 рассматриваются конкретные примеры применения прямого асимптотического метода (полоса и усеченная круговая луночка). Здесь важно подчеркнуть совпадение асимптотических результатов для слоя и луночки, полученных двумя различными способами (с помощью прямого асимптотического метода и метода, основанного на использовании техники конформных отображений в сочетании с математическим аппаратом парных интегральных уравнений).

Глава V

В этой главе рассматривается плоская задача об ударе с отрывом эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины. Предполагается, что цилиндр погружен в жидкость наполовину. С помощью метода нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна поставленная задача сводится к одному нелинейному интегральному уравнению, для решения которого применяется метод М. А. Красносельского. Такой подход позволяет одновременно определить потенциал скоростей и неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости. Изучено влияние дна, а также кинематических параметров и геометрических размеров на зону отрыва частиц жидкости от поверхности цилиндра.

Метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна был предложен Б. А. Галановым (ПММ, 1985 г.) для решения статических контактных задач теории упругости с неизвестными заранее областями контакта; контактные задачи для решения которых применялся такой подход приводятся в монографиях В. М. Александрова, Д. А. Пожарского (1988 г.) и В. М. Александрова и М. И. Чебакова (2004 г.).

В п. 5.1 настоящей главы дается постановка задачи об отрывном ударе эллиптического цилиндра и излагается способ ее сведения к нелинейному граничному интегральному уравнению типа Гаммерштейна. Далее более подробно остановимся на связи данной задачи с нелинейным интегральным уравнением.

Наряду с исходной нелинейной задачей (4.1)–(4.8) рассмотрим линейную смешанную краевую задачу в области D:

$$\Delta W = 0, \quad r \in D, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{S_1} = f, \quad \left.W\right|_{S_2} = 0, \quad \left.\frac{\partial W}{\partial n}\right|_{S_3} = 0. \tag{5.1}$$

Пусть $K\colon L_2(S_1) \to L_2(S_1)$ — линейный оператор, ставящий в соответствие нормальной производной функции W на S_1 решение задачи (5.1) на S_1:

$$K(f) = W. \tag{5.2}$$

С учетом соотношений (4.2), (4.3) и (5.2) нормальная производная потенциала скоростей Φ на границе S_1 будет определяться в результате решения системы неравенств:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial n} - V_n,$$

$$-K(u) \geqslant K(V_n), \quad u = 0, \quad r \in S_{11}, \tag{5.3}$$

$$-K(u) = K(V_n), \quad u \geqslant 0, \quad r \in S_{12}. \tag{5.4}$$

Естественно предположить, что существует область $S_0 = \{M\colon K(V_n) > 0\}$, $K(V_n) \leqslant 0$ при $M \notin S_0$ (S_0 — подобласть S_1). Отметим, что условие $K(V_n) \leqslant 0$ на всей границе S_1 соответствует задаче о безотрывном ударе плавающего тела.

Далее, следуя работе Б. А. Галанова (ПММ, 1985 г.) введем нелинейные операторы v^-, v^+:

$$v^- = v^-(M) = \inf\{v(M), 0\}, \quad v^+ = v^+(M) = \sup\{v(M), 0\},$$

и рассмотрим относительно неизвестной функции v нелинейное операторное уравнение:

$$Tv = 0, \quad Tv = \mu v^- - K(v^+) - K(V_n), \tag{5.5}$$

где параметр μ может принимать произвольные положительные значения. Справедливо следующее утверждение.

Если v^* — решение уравнения (5.5), то ($u = v^{*+}$, $S_{12} = \{(x, y) \in S_1\colon v^*(x, y) \geqslant 0\}$) — решение системы (5.3)–(5.4), причем $S_{12} \neq \varnothing$ при $S_0 \neq \varnothing$, обратно, если (u, S_{12}) — решение системы (5.3)–(5.4), то функция

$$v^* = \mu^{-1}K(V_n) + u + \mu^{-1}K(u), \quad M \in S_1$$

— решение уравнения (5.5). Область отрыва S_{12} может быть многосвязной.

Доказательство этого утверждения, а также существование единственного решения уравнения (5.5) в пространстве $L_2(S_1)$ при любом $\mu > 0$ проводится в полной аналогии со статьей Б. А. Галанова (ПММ, 1985 г.). Также объясняется произвольность параметра μ. Если v_1^* и v_2^* — решения уравнения (5.5), соответствующие значениям $\mu = \mu_1$ и $\mu = \mu_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, то $v_1^{*+} = v_2^{*+}$.

Таким образом, для решения системы (5.3)–(5.4) достаточно найти решение v^* нелинейного интегрального уравнения (5.4). При этом неизвестная априори зона отрыва S_{12} определяется как множество всех точек $M \in S_1$, для которых выполняется неравенство $v^* \geqslant 0$.

После решения нелинейного интегрального уравнения (5.5) потенциал скоростей Φ на границе S_1 определяется по формуле:

$$\Phi = K(v^{*+} + V_n). \tag{5.6}$$

Интересно обратить внимание на то, что в случае безотрывного удара, функция $v^* \leqslant 0$ на S_1 и, следовательно, $v^{*+} = 0$. В этом случае формула (5.6) дает решение задачи о безотрывном ударе плавающего тела.

В п. 5.2 описывается построение оператора K для случая жидкости конечной глубины. С помощью методов теории потенциала типа простого слоя нахождение оператора K сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с гладким ядром и гладкой правой частью и вычислению на основе его решения интеграла, имеющего логарифмическую особенность.

В п. 5.3 рассматривается численная реализация метода. Для решения нелинейного интегрального уравнения (5.5) применяется метод М. А. Красносельского, суть которого заключается в построении последовательных приближений по формулам:

$$v_{n+1} = v_n - \left(Q'v_0\right)^{-1} Tv_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

где Q — дифференцируемый оператор, хорошо аппроксимирующий оператор T по равномерной метрике. Отметим, что производная Фреше оператора T существует не на всех элементах пространства $L_2(S_1)$ (или $C(S_1)$), а только на некоторых специальных множествах.

Изучаются итерационные процессы, соответствующие различным начальным данным. Важно отметить, что при специальном выборе начального приближения ($v_0(x) \equiv -c$, $c > 0$) решение задачи сводится к явному итерационному процессу:

$$v_{n+1} = v_n - \frac{1}{\mu} Tv_n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

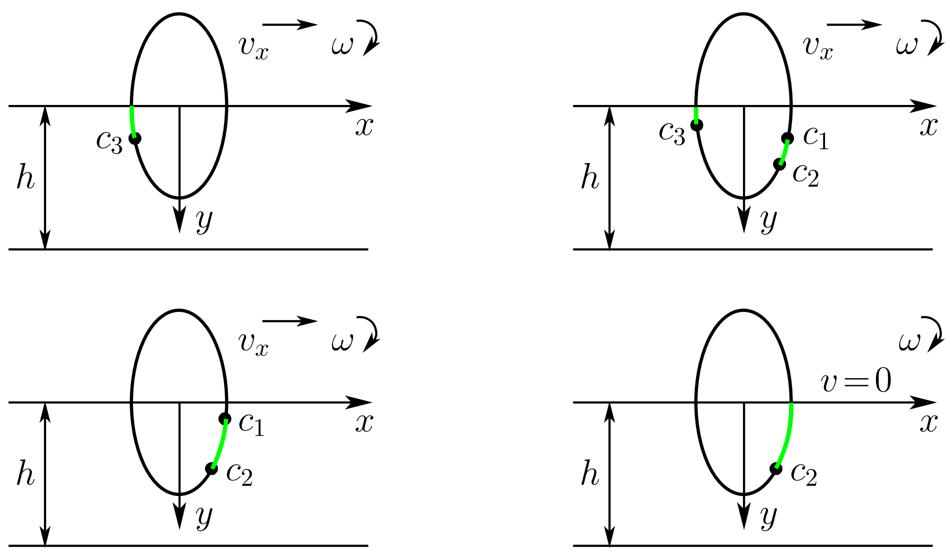
В п. 5.4 проводится сопоставление численных результатов, полученных при помощи метода нелинейных интегральных уравнений, с известными точными решениями.

В п. 5.5 дается численный анализ задачи. Исследуется влияние дна, а также кинематических параметров и геометрических размеров на образующуюся на поверхности эллиптического цилиндра зону отрыва частиц жидкости. В частности, отметим случай, когда в результате удара эллипс начинает двигаться в горизонтальном направлении и вращаться вокруг своей оси (горизонтальный удар с вращением). Полагаем $\delta = a/h = 2/3$, $\varepsilon = b/a = 2$, $v_y = 0$, фиг. 5.1. Здесь основное внимание уделяется изучению влияния безразмерной угловой скорости $\omega_1 = \omega a/v_x$ на зону отрыва S_{12} в случае жидкости конечной глубины. Далее индекс 1 опускаем.

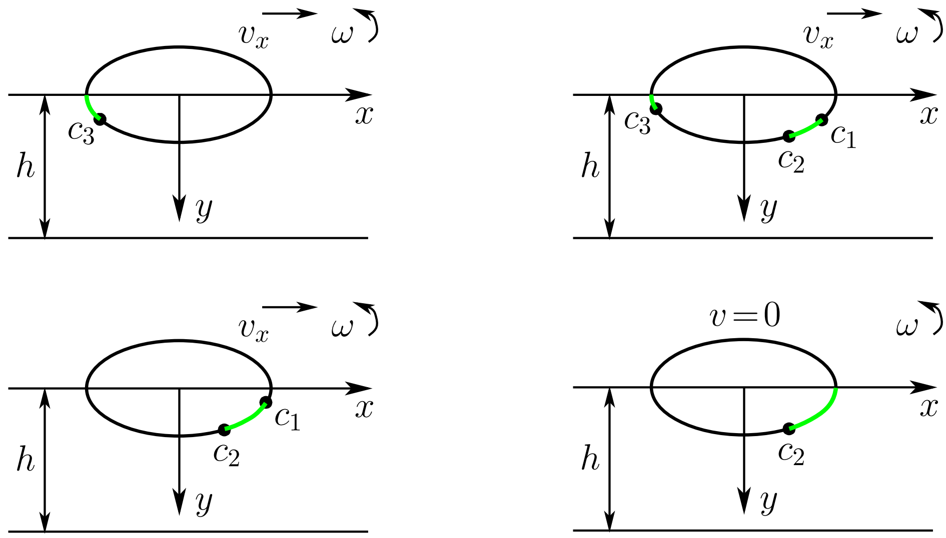
При горизонтальном ударе эллипса ($\omega = 0$) на смоченной границе S_1 образуется только одна зона отрыва. По мере увеличения угловой скорости ω эта зона уменьшается и, начиная с некоторого места, появляется вторая зона отрыва, которая вначале очень быстро расширяется (точки отрыва C_1 и C_2 движутся в разные стороны). Затем точка отрыва C_2 меняет направление. Дальнейшее увеличение угловой скорости вращения ω приводит к тому, что зона отрыва, расположенная в задней части эллипса исчезает и остается одна зона отрыва, находящаяся строго под водой. При больших ω ордината точки отрыва C_1 становится сколь угодно маленькой, а точка отрыва C_2 приближается к точке отрыва, соответствующей крутильному удару эллипса ($v_x = 0$, $v_y = 0$).

Аналогичная ситуация имеет место и в случае, когда эллипс больше вытянут в горизонтальном направлении ($\varepsilon = 0{,}5$, $\delta = 2/3$, $v_y = 0$, фиг. 5.2). Интересно обратить внимание на то, что образование двух зон отрыва происходит в случаях $a > b$ и $a < b$ при различных направлениях вращения эллипса. Отметим также образование двухсвязной зоны отрыва, а также зоны отрыва, расположенной строго в подводной части плавающего тела.

Предложенная выше схема решения задачи об отрывном ударе эллиптического цилиндра предполагала, что известны скорости, приобретенные эллипсом в результате удара.



Фиг. 5.1. Горизонтальный удар с вращением, $b > a$, $\omega < 0$



Фиг. 5.2. Горизонтальный удар с вращением, $b < a$, $\omega > 0$

В п. 5.6 рассматривается другая постановка задачи, когда заданными следует считать импульс внешней ударной силы $P = (P_x, P_y)$ и точку его приложения $R_0 = (x_0, y_0)$ (последние величины должны быть связаны уравнением эллипса). В этом случае скорости v_x, v_y, ω, приобретенные эллипсом в результате удара, находятся в результате решения системы нелинейных уравнений — уравнений изменения импульса и момента импульса плавающего тела при ударе. Для решения этой системы применяется метод простой итерации, на каждом шаге которого необходимо решить нелинейное интегральное уравнение типа Гаммерштейна.

После того, как заданная точность вычисления величин v_x, v_y и ω будет достигнута, на заключительном этапе могут быть определены неизвестные заранее зоны отрыва частиц жидкости, а также интегральные характеристики удара — компоненты полного ударного импульса и его момента, подействовавшие на плавающее тело в результате удара.

Отметим, что решение нелинейного интегрального уравнения типа Гаммерштейна несет в себе очень важную информацию о наличии или, напротив, отсутствии отрыва частиц жидкости от поверхности плавающего тела. Это дает хорошую возможность исследовать данную задачу без первоначального предположения о характере движения жидкости сразу после удара (отрывное или безотрывное обтекание).

Глава VI

В этой главе рассматривается задача об ударе с отрывом эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности неоднородной несжимаемой жидкости, наполняющей ограниченный бассейн. Подробно исследуется случай экспоненциально стратифицированной жидкости. Данная задача сводится к одному нелинейному операторному уравнению, для решения которого применяется модифицированный метод Ньютона–Канторовича. Такой подход позволяет одновременно определить неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости и течение жидкости после удара. Изучено влияние неоднородности жидкости, а также кинематических параметров и геометрических размеров на зону отрыва частиц жидкости от поверхности цилиндра.

В п. 6.1 этой главы рассматривается постановка задачи об отрывном ударе эллиптического цилиндра, наполовину погруженного в неоднородную, несжимаемую жидкость, наполняющую ограниченный бассейн (В. И. Юдович, 2004 г.):

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{\rho}\nabla\Phi\right) = 0, \tag{6.1}$$

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial n} = V_n, \quad \Phi \geqslant 0, \quad r \in S_{11}, \tag{6.2}$$

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial\Phi}{\partial n} \geqslant V_n, \quad \Phi = 0, \quad r \in S_{12}, \tag{6.3}$$

$$\Phi = 0, \quad r \in S_2, \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_3, \tag{6.5}$$

$$\Phi \to 0, \quad r \to \infty, \tag{6.6}$$

$$V_n = v_x n_x + v_y n_y + \omega(y n_x - x n_y), \tag{6.7}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_D \frac{1}{\rho}\left(\nabla\Phi\right)^2\, dD < \infty. \tag{6.8}$$

Здесь $\rho = \rho(x, y)$ — известная функция — распределение плотности после удара, совпадающее с распределением плотности до удара, Φ — импульсивное давление; D — область, занятая жидкостью; $S_1 = S_{11} \cup S_{12}$ — погруженная в жидкость половина эллипса, причем S_{11} — часть границы на которой не происходит отрыва частиц жидкости, а S_{12} — зона отрыва; S_2 — свободная поверхность жидкости; S_3 — неподвижная твердая граница бассейна; v_x, v_y, ω — поступательные вдоль осей x и y и угловая скорости, приобретенные эллипсом в результате удара; $n = (n_x, n_y)$ — вектор нормали к границе тела, направленный внутрь области D. Условие (6.6) добавляется в случае неограниченной жидкости. Ограничение (6.8) является достаточным и физически оправданным требованием регулярности решения данной задачи вблизи особых точек границы области D. Теорема существования и единственности решения задачи (6.1)–(6.8) доказана В. И. Юдовичем (2005 г.).

После решения задачи (6.1)–(6.8) скорости жидких частиц сразу после удара находятся из уравнения: $\rho u = -\nabla\Phi$, где u — приращение скорости в результате удара. Если до удара жидкость покоилась, то функция u есть скорость приобретенная частицами жидкости после удара.

Для полного решения задачи о гидродинамическом ударе с отрывом необходимо также учесть уравнения изменения импульса и момента импульса плавающего тела при ударе. С их помощью устанавливается связь между внешним ударным импульсом и точкой его приложения с одной стороны и векторами поступательной и угловой скорости, приобретенными телом в результате удара, с другой.

Важно подчеркнуть, что область контакта тела с жидкостью (равно как и зона отрыва) заранее неизвестна и подлежит определению вместе с импульсивным давлением Φ. На основании этого поставленная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

Поставленная задача сводится к одному нелинейному операторному уравнению типа Гаммерштейна, для решения которого применяется модифицированный метод Ньютона–Канторовича. Такой подход позволяет одновременно определить движение жидкости после удара и неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости.

В п. 6.2 описывается построение оператора K для экспоненциально стратифицированной жидкости конечной глубины. Дело сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода с логарифмической особенностью в ядре и вычислению интеграла, имеющего также логарифмическую особенность.

В п. 6.3 рассматривается численная реализация метода. С помощью специального выбора начального приближения модифицированный метод Ньютона–Канторовича приводит к явному итерационному процессу.

В п. 6.4 проводится численный анализ задачи. Исследуется влияние неоднородности жидкости на образующуюся на поверхности эллиптического цилиндра зону отрыва частиц жидкости.

Глава VII

В этой главе рассматривается существенно пространственная смешанная задача об отрывном ударе круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой и неограниченной жидкости. Область контакта тела с жидкостью (равно как и зона отрыва) заранее неизвестна и зависит от соотношения между поступательной и угловой скоростями, приобретенными диском в результате удара. Вследствие этого данная задача является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами. Для решения поставленной задачи применяется метод нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, развитый в работах Б. А. Галанова (ПММ, 1985; ДАН, 1987). Такой подход позволяет одновременно находить течение жидкости после удара и неизвестную заранее зону отрыва частиц жидкости.

В п. 7.1 дается постановка задачи об ударе с отрывом круглого диска и описывается ее сведение к нелинейному граничному интегральному уравнению типа Гаммерштейна.

В п. 7.2 рассматривается построение оператора K соответствующей линейной смешанной краевой задачи для случая неограниченной жидкости.

В п. 7.3 описывается численная реализация метода и проводится анализ результатов. Изучается влияние различных движений диска на образующуюся на его поверхности линию отрыва, отделяющую область безотрывного удара от зоны отрыва. Предлагается алгоритм, позволяющий определить линию отрыва по заданной точке приложения внешнего ударного импульса. Кроме этого находятся компоненты полного ударного импульса и его момента, подействовавшие на плавающий диск в результате удара.

В **заключении** диссертации перечислены основные результаты работы.

В приложении собраны наиболее часто используемые в диссертации формулы: разрывные интегралы Вебера и Мелера; интегральные представления функций Бесселя и Лежандра; разложения функций Лежандра в гипергеометрические ряды и различные другие соотношения.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. *Норкин М. В.* Удар вырожденного тора о жидкость бесконечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1995. № 5. С. 161–165.
2. *Норкин М. В.* Удар по твердому телу веретенообразной формы, погруженному в жидкость бесконечной глубины // ПМТФ. 1996. Т. 37. № 1. С. 36–41.
3. *Норкин М. В.* О начале отрыва при гидродинамическом ударе по плавающему телу // Изв. РАН. МЖГ. 1996. № 6. С. 99–104.
4. *Норкин М. В.* Удар тонкого тора о поверхность идеальной жидкости бесконечной глубины // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1997. Т. 37. № 10. С. 1263–1268.
5. *Норкин М. В.* Вертикальный удар по твердому телу, плавающему на поверхности слоя идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 1999. № 1. С. 74–81.
6. *Норкин М. В.* Вертикальный удар тонкого тора эллиптического поперечного сечения, плавающего на поверхности идеальной и несжимаемой жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2000. № 2. С. 144–152.
7. *Норкин М. В.* Об учете влияния стенок бассейна произвольной формы при безотрывном ударе плавающего тела // ПМТФ. 2001. Т. 42. № 1. С. 77–81.
8. *Норкин М. В.* Вертикальный удар твердого тела, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне произвольной формы // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 3. С. 114–122.
9. *Норкин М. В.* Отрывной удар пластины, плавающей на поверхности идеальной несжимаемой жидкости в ограниченном бассейне // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 43–50.
10. *Норкин М. В.* Методы решения нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 135–147.
11. *Норкин М. В.* Смешанные задачи гидродинамического удара. Ростов-на-Дону: Изд. ЦВВР, 2007. 136 с.
12. *Норкин М. В.* Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 120–132.

13. *Норкин М. В.* Отрывной удар круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 76–86.

14. *Норкин М. В.* Удар с отрывом эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности несжимаемой, экспоненциально-стратифицированной жидкости // Изв. Вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. Спецвыпуск, посвященный 75-летию В. И. Юдовича. Ростов-на-Дону: Изд-во СКНЦ ВШ, 2009. С. 168–173.